“Finding the derivative price using the Vasicek model with multidimensional stochastic volatility”

AUTHORS	Ivan Burtnyak https://orcid.org/0000-0002-9440-1467 Anna Malytska https://orcid.org/0000-0002-5811-9288

ARTICLE INFO	Ivan Burtnyak and Anna Malytska (2019). Finding the derivative price using the Vasicek model with multidimensional stochastic volatility. *Development Management*, *17*(4), 19-30. doi:10.21511/dm.17(4).2019.02
DOI	http://dx.doi.org/10.21511/dm.17(4).2019.02
RELEASED ON	Monday, 20 January 2020
RECEIVED ON	Wednesday, 24 July 2019
ACCEPTED ON	Thursday, 31 October 2019

JOURNAL	"Development Management"
ISSN PRINT	2413-9610
ISSN ONLINE	2663-2365
FOUNDER	Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics

Ivan Burtnyak (Ukraine), **Anna Malytska** (Ukraine)

FINDING THE DERIVATIVE PRICE USING THE VASICEK MODEL WITH MULTIDIMENSIONAL STOCHASTIC VOLATILITY

Abstract

Methods of calculating the approximate price of options using instruments of spectral analysis, singular and regular wave theory in the context of influence of fast and slow acting factors are developed. By combining methods from the spectral theory of singular and regular disturbances, one can approximate the price of derivative financial instruments as a schedule of its own functions. The article uses the theory of spectral analysis and the singular and regular theory of perturbations, which are applied to the short-term interest rates described by the Vasicek model with multidimensional stochastic volatility. The approximate price of derivatives and their profitability are calculated. Applying the Sturm-Liouville theory, the Fredholm alternative, and the analysis of singular and regular disturbances in different time scales, explicit formulas were obtained for the approximation of bond prices and yields based on the development of their own functions and eigenvalues of self-adjoint operators using boundary value problems for singular and regular perturbations. The theorem for estimating the accuracy of derivatives price approximation is established. Such a technique, in contrast to existing ones, makes it possible to study the stock market dynamics and to monitor the financial flows in the market. This greatly facilitates the statistical evaluation of their parameters in the process of monitoring the derivatives pricing and the study of volatility behavior for the profitability analysis and taking strategic management decisions on the stock market transactions.

Keywords stock market, Vasicek model, spectral theory, singular wave theory, regular wave theory, stochastic volatility, implied volatility

JEL Classification C65, G11, G13

І. В. Буртняк (Україна), **Г. П. Малицька** (Україна)

ЗНАХОДЖЕННЯ ЦІНИ ДЕРИВАТИВУ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛІ ВАСІЧЕКА З БАГАТОВИМІРНОЮ СТОХАСТИЧНОЮ ВОЛАТИЛЬНІСТЮ

Анотація

Розроблено методи обчислення наближеної ціни опціонів за допомогою інструментів спектрального аналізу, сингулярної та регулярної хвильової теорії у випадку впливу швидко- та повільнодіючих чинників. Комбінуючи методи з спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, можна наближено обчислити ціну похідних фінансових інструментів, як розклад за власними функціями. В статті за допомогою методів теорії спектрального аналізу та сингулярної і регулярної теорії збурень, які застосовані до короткострокових відсоткових ставок, що описуються моделлю Васічека з багатовимірною стохастичною волатильністю. Обчислено наближену ціну деривативів та їх дохідність. Застосувавши теорію Штурма-Ліувілля, альтернативу Фредгольма, а також аналіз сингулярних і регулярних збурень в різних часових шкалах, отримано явні формули для наближень цін облігацій та дохідності на основі розвинення за власними функціями та власними значеннями самоспряжених операторів з використанням крайових задач для сингулярних і регулярних збурень. Встановлено теорему оцінки точності наближення цін деривативів. Така методика, на відміну від існуючих дає можливість проводити дослідження динаміки фондового ринку і здійснювати моніторинг фінансових потоків на ринку. Це значно полегшує статистичну оцінку їхніх параметрів в

S. KUZNETS KHNUE

Founder

Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, Nauky avenue, 9-A, Kharkiv, 61166, Ukraine
http://www.hneu.edu.ua/

Received on: 24th of July, 2019
Accepted on: 31th of October, 2019

Ivan Burtnyak, Doctor of Economics, Professor, Department of Economic Cybernetics, Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ukraine

Anna Malytska, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical and Functional Analysis, Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ukraine

процесі моніторингу ціноутворення деривативів та дослідження поведінки волатильності для аналізу дохідності та прийняття стратегічних управлінських рішень щодо здійснення операцій на фондовому ринку.

Ключові слова фондовий ринок, модель Васічека, спектральна теорія, сингулярна хвильова теорія, регулярна хвильова теорія, стохастична волатильність, імпліковання волатильність

Класифікація JEL C65, G11, G13

ВСТУП

Спектральні методи, є ефективним інструментом для ціноутворення деривативів. Ефективне знаходження швидкості зміни росту портфеля акцій, величини фінансового потоку, а також дослідження темпів зростання ринкового портфеля, що забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу реалізується за допомогою застосування спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень. Виплати за деривативами можуть бути шляхозалежними, а процес, що лежить в їх основі може проявляти стрибок, інтенсивність якого залежить від багатовимірної волатильності. Ціна деривативів залежить від стохастичної волатильності, яка описується шляхозалежним процесом. Знаходження ціни деривативів зводиться до розв'язання задачі знаходження власних значень і власних функцій конкретного рівняння, що відповідає даній моделі. У загальній теорії розглядаються більш ширші припущення на стохастичні процеси, зокрема такі як мартингальні, але не завжди існує аналітична формула для зображення розв'язку тому ми припускаємо що процеси марківські. Аналітична форма розв'язку задачі Штурма-Ліувілля дає можливість обчислювати ціну деривативу, швидкість росту портфеля акцій та досліджувати волатильність на ринку в будь-який момент часу.

1. ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД

Моделі динаміки короткострокових відсоткових ставок розглядались в роботі Васічека [16] для ціноутворення деривативів. Значний внесок у теорію відсоткових ставок зробили Бреннан, Шварц [3], Халл, Вайт [9], Кокс, Інгерсол, Росс [7], Мортон [15], а саме: знаходження кредитного спреду інструментів кредитного ринку, визначення цін опціонів на відсоткову ставку, визначення ризику і доходності похідних фінансових інструментів фондового ринку. Розроблені цими вченими моделі мають свої переваги та недоліки, але кожна з них застосовується для підвищення ліквідності фінансових ринків. Використання складніших моделей, незважаючи на свою теоретичну обґрунтованість, зумовлює отримання складних багатопараметричних функцій кривої прибутковості, а це спричиняє значні похибки в обчисленнях.

Використовуючи спектральний аналіз Лінецький [12] застосував спектральну теорію самоспряжених операторів до різних моделей, а зокрема до моделі Васічека. В роботі Лоріга [14] розглядалися короткострокові відсоткові ставки, описані моделлю Васічека з стохастичною волатильністю, залежною від двох факторів, один з яких швидко, а другий повільно мінливі. В нашій статті спектральна теорія та теорія сингулярних і регулярних збурень застосована до самоспряжених операторів у гільбертових просторах, які описують процеси з багатовимірною стохастичною волатильністю, що має l-швидко мінливих, r-повільно мінливих факторів $l \geq 1$, $r \geq l$, $l \in N$, $r \in N$. Зокрема дана теорія застосована до короткострокових відсоткових ставок, що описуються моделлю Васічека. Обчислено наближену ціну облігацій та їх дохідність. Застосувавши теорію Штурма-Ліувілля, альтернативи Фредгольма, а також аналіз сингулярних і регулярних збурень в різних часових шкалах, ми отримали явні формули для наближень цін облігацій та дохідності. Для отримання явних формул потрібно розв'язати 2l рівнянь Пуассона.

2. МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Розробка зручного підходу встановлення орієнтовної ціни деривативів та їх дохідності методами спектральної теорії та хвильової теорії збурень є метою дослідження. Такі підходи мають застосування при розв'язуванні економічних задач на знаходження короткострокових відсоткових ставок, кредитних спредів та стохастичної волатильності деривативів.

 http://dx.doi.org/10.21511/dm.17(4).2019.02

3. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Нехай *(Q, F, P)* є простором ймовірності, який підтримує корельований броунівський рух (W^x, W^{y1}, …, W^{y1}, W^{z1}, …, W^{zr}) і експоненціальна випадкова змінна $\varepsilon \sim Exp(1)$, яка є незалежною від (W^x, W^{y1}, …, W^{y1}, W^{z1}, …, W^{zr}). Ми будемо вважати, що економіка з (l+*r*+1) факторами, описана однорідним часом та неперервним Марківським процесом $\chi = (X, Y_1, \ldots, Y_1, Z_1, \ldots, Z_r)$, який визначений в деякому просторі станів $E = I \cdot R^l \cdot R^r$, де $(Y_1, \ldots, Y_1) \in R^l$, $(Z_1, \ldots, Z_r) \in R^r$, I – інтервал в R з точками e_1 та e_2, такими, що $-\infty < e_1 < e_2 < \infty$. Ми припускаємо, що X має початок в E і миттєво зникає, як тільки X виходить за межі I. Зокрема, динаміка X з фізичною мірою P, є наступною:

$$\chi_t = \left\{ \frac{(X_t, Y_{1t}, \ldots, Y_{1t}, Z_{1t}, \ldots, Z_{rt})}{\Delta} \right\}, \quad \tau_1 > t, \quad \tau_1 = \inf(t > 0 : X_t \notin I),$$

$$\tau_1 \le t,$$

де $(X, Y_1, \ldots, Y_1, Z_1, \ldots, Z_r)$, задаються

$$\begin{cases} dX_t = v(X_t)dt + a(X_t) f(\mathrm{Y_{1t}}, \ldots, \mathrm{Y_{lt}}, \mathrm{Z_{1t}}, \ldots, \mathrm{Z_{rt}}) dW_t^x, \\ dY_{jt} = \frac{1}{\epsilon_j} \alpha_j(Y_{jt}) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \beta_j(Y_{jt}) dW_t^{y_j}, \quad j = \overline{1, l}. \\ dZ_{it} = \delta_i c_i(Z_{it}) dt + \sqrt{\delta_i} g_i(Z_{it}) dW_t^{z_i}, \quad i = \overline{1, r}. \\ d(W^x, W^{y_j})_t = \rho_{xy_j} dt, \quad j = \overline{1, l}. \\ d(W^x, W^{z_i})_t = \rho_{xz_i} dt, \quad i = \overline{1, r}. \\ d(W^{y_j}, W^{z_i})_t = \rho_{y_j z_i} dt, \quad j = \overline{1, l}, \ i = \overline{1, r}. \\ d(W^{y_j}, W^{y_r})_t = \rho_{y_j y_s} dt, \quad j = \overline{1, l}, \ s = \overline{1, l}. \\ d(W^{z_i}, W^{z_k})_t = \rho_{z_i z_k} dt, \quad i = \overline{1, n}, \ k = \overline{1, r}. \\ (X_0, \mathrm{Y_{10}}, \ldots, \mathrm{Y_{l0}}, \mathrm{Z_{10}}, \ldots, \mathrm{Z_{r0}}) = (x, y_{10}, \ldots y_{l0}, z_{10}, \ldots, z_{r0}) \in E. \end{cases}$$

де $\rho_{y_j y_s} = 0, \ j \ne r, \ \rho_{z_i z_k} = 0, \ i \ne k$, $\rho_{xy_j}, \rho_{xz_i}, \rho_{y_j z_i}$, задовольняють умову $\left|\rho_{xy_j}\right|, \left|\rho_{xz_i}\right|, \left|\rho_{y_j z_i}\right| \le 1$, а кореляційні матриці виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_{xy_j} & \rho_{xz_i} \\ \rho_{y_j x} & 1 & \rho_{y_j z_i} \\ \rho_{z_i x} & \rho_{z_i y_j} & 1 \end{pmatrix}$$

напівдодатно визначені, тобто $1 + 2\rho_{xy_j} \rho_{xz_i} \rho_{y_j z_i} - \rho_{xy_j}{}^2 - \rho_{xz_i}{}^2 - \rho_{y_j z_i}{}^2 \ge 0, \ j = \overline{1, l}, \ i = \overline{1, r}.$

Процес X може репрезентувати багато економічних явищ, та процесів.

Наприклад, величину запасів, ціну індексу, надійний короткий відсоток і т.д. Ще ширше, X це зовнішній фактор, який характеризує вартість будь-яких із згаданих вище процесів. Під фізичною мірою $\mathbb{P}$ процесу X, розуміють процес X, який має миттєвий дрейф $v(X_t)$ і стохастичну волатильність $a(X_t) f(Y_{1t}, \ldots, Y_{lt}, Z_{1t}, \ldots, Z_{nt}) > 0$, який містить обидві компоненти: локальну $a(X_t)$ і нелокальну $f(Y_{1t}, \ldots, Y_{lt}, Z_{1t}, \ldots, Z_{nt})$. Зауважимо, що нескінченно малі генератори (інфінітіземальні) для Y_j та Z_i мають вигляд $V_{i,j}$.

$$\mathfrak{L}_{Y_j}^{\varepsilon_j} = \frac{1}{\varepsilon_j}\left(\frac{1}{2}\beta_j^{\,2}\left(y_j\right)\partial_{y_j y_j}^2 + \alpha_j\left(y_j\right)\partial_{y_j}\right), \mathfrak{L}_{Z_i}^{\delta_i} = \delta_i\left(\frac{1}{2}g_i^{\,2}\left(z_i\right)\partial_{z_i z_i}^2 + c_i\left(z_i\right)\partial_{z_i}\right),$$

характеризуються величинами $\frac{1}{\varepsilon_j}$ та δ_i відповідно. Таким чином, $Y_1, \ldots, Y_1$ та $Z_1, \ldots, Z_n$ мають внутрішню шкалу часу $\varepsilon_j > 0$ і $1/\delta_i > 0$. Ми вважаємо $\varepsilon_j << 1$ і $\delta_i << 1$, щоб внутрішня шкала часу Y_j була малою, а внутрішня шкала часу Z_i великою. Отже, Y_j , $j = \overline{1,l}$, це швидко змінні фактори, а Z_i , $i = \overline{1,n}$ повільно змінні фактори. Зауважимо, що $\mathfrak{L}_{Y_j}^{\varepsilon_j}$ та $\mathfrak{L}_{Z_i}^{\delta_i}$ мають форму виду:

$$L = \frac{1}{2}a^2\left(x\right)\partial_{xx}^2 + b\left(x\right)\partial_x - k\left(x\right),\ \ x \in \left(e_1, e_2\right),\ \text{з}\ k\left(x\right) = 0,$$

для всіх $x \in I$, є завжди самоспряженими в Гільбертовому простор $H=L^2(I, m)$, де $I \in R$ інтервал з кінцями e_1 і e_2 та m - швидкість щільності дифузії.

$$\mathrm{Dom}\left(\mathfrak{L}\right)\left\{f \in L^2\left(I, \mathfrak{m}\right) : f, \partial_x f \in AC_{\mathrm{loc}}\left(I\right), \mathfrak{L}f L^2\left(I, \mathfrak{m}\right), BCs\ \textit{на}\ e_1\ \ \textit{та}\ e_2\right\},$$

де $AC_{\mathrm{loc}}\left(I\right)$ є простором функцій, абсолютно неперервних на кожному компактному під-інтервалі I [13].

Крайові умови на e_1 та e_2 накладаються для вихідних, вхідних і регулярних меж.

Оцінимо похідний цінний папір, з виплатою в час $t > 0$, яка може залежати від траєкторії X. Зокрема, ми розглянемо форми виплати:

$$\textit{Виплата} = H\left(X_t\right)\mathbb{I}_{(\tau > t)}\ ,$$

де τ – випадковий момент часу, протягом якого є невиплата премії похідного активу. Для знаходження оцінки похідних активів ми повинні визначити динаміку (X, Y1,...Yl, Z1,...,Zr) відносно міри при нейтральному ризику $\tilde{\mathbb{P}}$. Маємо таку динаміку:

http://dx.doi.org/10.21511/dm.17(4).2019.02

$$\begin{cases} dX_t = \big(b(X_t) - a(X_t) f(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{lt}}, \mathrm{Z}_{1\mathrm{t}}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{rt}}) \Omega(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{lt}}, \mathrm{Z}_{1\mathrm{t}}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{rt}})\big) dt \\ \quad + a(X_t) f(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{lt}}, \mathrm{Z}_{1\mathrm{t}}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{rt}}) d\widetilde{W}_t^x, \\ dY_{jt} = \left(\frac{1}{\epsilon_j} \alpha_j(Y_{jt}) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \beta_j(Y_{jt}) \Lambda_j(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{lt}}, \mathrm{Z}_{1\mathrm{t}}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{rt}})\right) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \beta_j(Y_{jt}) d\widetilde{W}_t^{y_j}, \\ dZ_{it} = \left(\delta_i c_i(Z_{it}) - \sqrt{\delta_i} g_i(Z_{it}) \Gamma_i(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{lt}}, \mathrm{Z}_{1\mathrm{t}}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{rt}})\right) dt + \sqrt{\delta_i} g_i(Z_{it}) d\widetilde{W}_t^{z_i}, \\ d\langle \widetilde{W}^x, \widetilde{W}^{y_j} \rangle_t = \rho_{xy_j} dt, \qquad j = \overline{1,l}. \\ d\langle \widetilde{W}^x, \widetilde{W}^{z_i} \rangle_t = \rho_{xz_i} dt, \qquad i = \overline{1,r}. \\ d\langle \widetilde{W}^{y_j}, \widetilde{W}^{z_i} \rangle_t = \rho_{y_j z_i} dt, \quad j = \overline{1,l}, \quad i = \overline{1,r}. \\ d\langle \widetilde{W}^{y_j}, \widetilde{W}^{y_s} \rangle_t = \rho_{y_j y_s} dt, \quad j = \overline{1,l}, \quad s = \overline{1,l}. \\ d\langle \widetilde{W}^{z_i}, \widetilde{W}^{z_k} \rangle_t = \rho_{z_i z_k} dt, \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,n}. \\ (X_0, \mathrm{Y}_{10}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{l0}}, \mathrm{Z}_{10}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{r0}}) = (x, y_{10}, \dots y_{l0}, z_{10}, \dots, z_{r0}) \in E, \end{cases}$$

де

$$d\tilde{W}_t^x := dW_t^x + \left(\frac{v(X_t) - b(X_t)}{a(X_t) f(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{lt}}, \mathrm{Z}_{1\mathrm{t}}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{nt}})} + \Omega(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{lt}}, \mathrm{Z}_{1\mathrm{t}}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{rt}}) \right) dt,$$

$$d\tilde{W}_t^{y_j} := dW_t^{y_j} + \Lambda_j(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{lt}}, \mathrm{Z}_{1\mathrm{t}}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{rt}}) dt,$$

$$d\tilde{W}_t^{z_i} := dW_t^{z_i} + \Gamma_i(\mathrm{Y}_{1t}, \dots, \mathrm{Y}_{\mathrm{lt}}, \mathrm{Z}_{1\mathrm{t}}, \dots, \mathrm{Z}_{\mathrm{rt}}) dt,$$

$$\rho_{y_j y_s} = 0, \ j \neq s, \ \rho_{z_i z_k} = 0, \ i \neq k.$$

Ми накладаємо такі умови щоб система (1) мала єдиний сильний розв'язок.

Випадковий час τ часом похідного активу. У нашому випадку, дефолт може відбутися одним із двох способів:

1. Коли *X* виходить за інтервал *I*.
2. У випадковий час τ_h, яким керує рівень ризику $h(X_t) \geq 0$.

Це можна виразити наступним чином:

$$\begin{cases} \tau = \tau_I \wedge \tau_h, \\ \tau_I = inf\{t \geq 0 : X_t \notin I\}, \\ \tau_h = inf\left\{t \geq 0 : \int_0^t h(X_s) ds \geq \varepsilon(X, \mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_\mathrm{n})\right\}, \\ \varepsilon \sim Exp(1) \, \underline{\|} \, . \end{cases}$$

Зважимо, що випадкова змінна ε незалежна від $(X, \mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_\mathrm{n})$.

Щоб відстежувати τ_h, ми використаємо індикатор процесу: $D_t = \mathbb{I}_{\{t \geq \tau_h\}}$,

де $\mathbb{D} = \{\mathfrak{D}_t, t \geq 0\}$ - фільтр породжений D та $\mathbb{F} = \{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ – фільтр генератора $\left(W^x, W^{y_1}, \ldots W^{y_l}, W^{z_1}, \ldots, W^{z_n}\right)$. Використаємо фільтрацію $\mathbb{G} = \{\mathfrak{G}_t, t \geq 0\}$, де $\mathfrak{G}_t = \mathfrak{F}_t V \mathfrak{D}_t$. Зауважимо, що $\left(X, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n\right)$ пристосовані до $\mathbb{G}$ і τ – час зупинки $\left(\{\{\tau \leq t\}\} \in \mathfrak{G}_t \text{ для всіх } t \geq 0\right)$.

Оцінимо похідний актив деякого виграшу (виплати), використовуючи нейтральний ризик ціноутворення і Марківський ланцюг *X*, ціна $u^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}\left(t, x, y_1, \ldots y_l, z_1, \ldots, z_r\right)$ деяких похідних активів в початковий момент часу має вигляд:

$$u^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}\left(t, x, y_1, \ldots y_l, z_1, \ldots, z_r\right) = \tilde{\mathbb{E}}_{x, y_1, \ldots y_l, z_1, \ldots, z_r}\left[exp\left(-\int_0^t r\left(X_s\right) ds\right) H\left(X_t \mathbb{I}_{\{t > \tau\}}\right)\right],$$

де $\bar{\varepsilon} = \left(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l\right)$, $\overline{\delta'} = \left(\delta_1, \ldots, \delta_r\right)$, а $\left(x, y_1, \ldots y_l, z_1, \ldots, z_r\right) \in E$ є початкова точка процесу $\left(X, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_\mathrm{r}\right)$.

За допомогою формули Фейнмана-Каца [2], можна показати, що $u^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}\left(t, x, y_1, \ldots y_l, z_1, \ldots, z_r\right)$ задовольняє наступній задачі Коші [13]:

$$\left(-\partial_t + \mathfrak{L}^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}\right) u^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'} = 0, \qquad \left(y_1, \ldots y_l, z_1, \ldots, z_r\right) \in E, t \in \mathbb{R}^+, \qquad (2)$$

$$u^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}\left(0, x, y_1, \ldots y_l, z_1, \ldots, z_r\right) = H(x), \qquad (3)$$

де оператор $\mathfrak{L}^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'}$ має вигляд:

$$\mathfrak{L}^{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}'} = \Sigma_{j=1}^l \frac{1}{\epsilon_j} \mathfrak{L}_{0j} + \Sigma_{j=1}^l \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j}} \mathfrak{L}_{1j} + \mathfrak{L}_{2j} + \Sigma_{j=1}^l \sqrt{\frac{\delta_i}{\epsilon_j}} \mathfrak{M}_{3ij} + \Sigma_i \sqrt{\delta_i} \mathfrak{M}_{1i} + \Sigma_i \delta_i \mathfrak{M}_{2i}$$

$$\mathfrak{L}_{0j} = \frac{1}{2} \beta_j^2\left(y_j\right) \partial_{y_j y_j}^2 + \alpha_j\left(y_j\right) \partial_{y_j}, \ j = \overline{1, l}.$$

$$\mathfrak{L}_{1j} = \beta_j\left(y_j\right)\left(\rho_{x y_j} a(x) f\left(y_1, \ldots y_l, z_1, \ldots, z_r\right) \partial_x - \Lambda_j\left(y_1, \ldots y_l, z_1, \ldots, z_r\right)\right) \partial_{y_j},$$

$$\mathfrak{L}_{2j} = \frac{1}{2} a^2(x) f^2\left(y_1, \ldots y_l, z_1, \ldots, z_r\right) \partial_{xx}^2 +$$

$$+\left(b(x) - a(x) \Omega\left(y_1, \ldots y_l, z_1, \ldots, z_r\right) f\left(y_1, \ldots y_l, z_1, \ldots, z_r\right)\right) \partial_x - k(x),$$

$$\mathfrak{M}_{3ij} = \rho_{x z_i} \beta_j\left(y_j\right) g_i\left(z_i\right) \partial_{y_j z_i}^2,$$

$$\mathfrak{M}_{1i} = g_i\left(z_i\right)\left(\rho_{x z_i} a(x) f\left(y_1, \ldots y_l, z_1, \ldots, z_r\right) \partial_x - \Gamma_i\left(y_1, \ldots y_l, z_1, \ldots, z_r\right)\right) \partial_{z_i},$$

$$\mathfrak{M}_{2i} = \frac{1}{2} g_i^2\left(z_i\right) \partial_{z_i z_i}^2 + c_i\left(z_i\right) \partial_{z_i}, \ k(x) = r(x) + h(x), \quad \mathfrak{L}_{0j} = \mathfrak{L}_{Y_j}^1.$$

Ми припускаємо, що дифузія з інфінітіземальним генератором $\mathfrak{L}_{Y_j}^1$ має інваріантний розподіл П з щільністю $\pi_j(y_i)$:

http://dx.doi.org/10.21511/dm.17(4).2019.02

$$\pi_j\left(y_j\right)=\frac{2}{\beta_j^2\left(y_j\right)}\exp\left\{\int\limits_{y_{j0}}^{y_j}\frac{2\alpha_j\left(\theta\right)}{\beta_j^2\left(\theta\right)}d\theta\right\},\quad \forall j=\overline{1,l}.$$

Крім початкової умови (3) функція $u^{\bar{\varepsilon},\bar{\delta}'}\left(t,x,y_1,\dots y_l,z_1,\dots,z_r\right)$ повинна задовольняти на кінцях e_1 та e_2 інтервалу I крайові умови. Крайові умови в точках e_1 та e_2 належать області $\mathfrak{L}^{\bar{\varepsilon},\bar{\delta}'}$ і будуть залежати від природи процесу X на кінцях I та класифікуються як природні, вихідні, вхідні або регулярні [2]. Задача Коші (2)-(3) для (f, $a_1,\dots a_l$, $\beta_1,\dots,\beta_r$, $\Lambda_{1,\dots}\Lambda_l$, $c_1,\dots,c_r$, $g_1,\dots g_r$, $\Gamma_1,\dots\Gamma_r$) не має аналітичного розв'язку. Однак для фіксованого $\overline{\delta'}$, умови, які містять $\bar{\varepsilon}$ та відхиляються як завгодно мало в $\bar{\varepsilon}$-околі, що зумовлює сингулярні збурення. Для фіксованого ε_j умови, які містять δ_i є малими для деякого малого $\overline{\delta'}$ -околу, що спричиняє регулярні збурення. Таким чином, $\bar{\varepsilon}$ -окіл та $\overline{\delta'}$ -окіл дає початок об'єднаному сингулярно-регулярному збуренню $\mathcal{O}(1)$ оператора $\mathfrak{L}_2$. Для того щоб знайти асимптотичний розв'язок задачі Коші (2) (3) розвинемо $u^{\bar{\varepsilon},\bar{\delta}'}$ за степенями $\sqrt{\varepsilon_j}$ та $\sqrt{\delta_i}$ [4]:

$$u^{\bar{\varepsilon},\bar{\delta}'}=\sum_{i_1\geq 0}\dots\sum_{i_l\geq 0}\sum_{j_1\geq 0}\dots\sum_{j_r\geq 0}\sqrt{\varepsilon_1}^{\,j_1}\dots\sqrt{\varepsilon_l}^{\,j_l}\sqrt{\delta_1}^{\,i_1}\dots\sqrt{\delta_r}^{\,i_r}u_{j_1,\dots,j_n,i_1,\dots i_l},$$

де $\sum_{i_1\geq 0}\dots\sum_{i_l\geq 0}\sum_{j_1\geq 0}\dots\sum_{j_r\geq 0}\sqrt{\overline{\varepsilon_1}}^{\,j_1}\dots\sqrt{\overline{\varepsilon_l}}^{\,j_l}\sqrt{\overline{\delta_1}}^{\,i_1}\dots\sqrt{\overline{\delta_r}}^{\,i_r}u_{j_1,\dots,j_r,i_1,\dots i_l}=$

$$\lim\sum_{i_1\geq 0}^{m_1}\dots\sum_{i_l\geq 0}^{m_l\geq 0}\sum_{j_1\geq 0}^{m_{l+1}\geq 0}\dots\sum_{j_n\geq 0}^{m_{l+r}}\sqrt{\varepsilon_1}^{\,j_1}\dots\sqrt{\varepsilon_l}^{\,j_l}\sqrt{\delta_1}^{\,i_1}\dots\sqrt{\delta_r}^{\,i_r}u_{j_1,\dots,j_r,i_1,\dots i_l},$$

$$m_1\to\infty,\dots,m_{l+r}\to\infty.$$

Наближена ціна обчислюється:

$$u^{\bar{\varepsilon},\bar{\delta}'}\approx u_{\bar{0},\bar{0}'}+\sum_{j=1}^{l}\sqrt{\varepsilon_j}u_{\bar{1}_j,\bar{0}'}+\sum_{i=1}^{r}\sqrt{\delta_i}u_{\bar{0},\bar{1}_i'}.$$

Вибір розвинення в напівцілих степенях ε_j та δ_i є природнім для $\mathfrak{L}^{\bar{\varepsilon},\bar{\delta}'}$.

Проводячи аналіз сингулярних збурень на відповідних рівнях ми отримаємо, що $u_{\bar{0},\bar{0}'}$, $u_{\bar{1}_j,\bar{0}'}$, $u_{\bar{0},\bar{1}_i'}$ не залежать від $y_1,\dots y_l$.

4. РЕЗУЛЬТАТИ

Основні результати асимптотичного аналізу наведені за допомогою наступних формул:

$$\mathcal{O}(1):\ \sum_{j=1}^{l}\mathfrak{L}_{0j}u_{\bar{2}_j,\bar{0}'}+\left(-\partial_t+\langle\mathfrak{L}_2\rangle\right)u_{\bar{0},\bar{0}'}=0,\ u_{\bar{0},\bar{0}'}\left(0,x,z_1,\dots,z_r\right)=H\left(x\right),$$

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\epsilon_j}\right):\mathfrak{L}_{0j}u_{\bar{3}_j,\bar{0}'}+\mathfrak{L}_{1j}u_{\bar{2}_j,\bar{0}'}+\left(-\partial_t+\langle\mathfrak{L}_2\rangle\right)u_{\bar{1}_j,\bar{0}'}+\sum_{k\neq j}\mathfrak{L}_{1k}u_{\bar{1}_{kj},\bar{0}'}+\sum_{i\neq j}\mathfrak{L}_{1i}= \tag{4}$$

$$\mathcal{A}_ju_{\bar{0},\bar{0}'},\quad u_{\bar{1}_j,\bar{0}'}\left(0,x,z_1,\dots,z_n\right)=0,$$

де $\overline{1}_{kj} = \left(\underbrace{0,\ldots 1}_{k}, \underbrace{0,1,0,\ldots .0}_{j} \right)$.

З аналізу регулярних збурень маємо:

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\delta_i}\right):\left(-\partial_t + \langle \mathfrak{L}_2 \rangle\right) u_{\overline{0},\overline{1}_i} = \mathcal{B}_i \partial_{z_i} u_{\overline{0},\overline{0}'},\ u_{\overline{0},\overline{1}_i}\left(0,x,z_1,\ldots,z_r\right) = 0, i = \overline{1,r}. \qquad (5)$$

Оператори $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$, $\mathcal{A}_j$, $\mathcal{B}_i$ та ∂_{z_i} визначені за формулами:

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 a^2\left(x\right)\partial_{xx}^2 + \left(b\left(x\right) - \overline{f\Omega} a\left(x\right)\right)\partial_x - k\left(x\right), \quad x \in \left(e_1, e_2\right),$$

$$\mathcal{A}_j = -\nu_{3j} a\left(x\right)\partial_x a^2\left(x\right)\partial_{xx}^2 - \nu_{2j} a^2\left(x\right)\partial_{xx}^2 - \mathcal{U}_{2j} a\left(x\right)\partial_x a\left(x\right)\partial_x - \mathcal{U}_{1j} a\left(x\right)\partial_x,$$

$\mathcal{B}_i = -\nu_{1i} a\left(x\right)\partial_x - \nu_{0i}$ та $\partial_{z_i} = \partial_{z_i}\overline{\sigma}\partial_{\overline{\sigma}} + \overline{f\Omega}'\partial_{\overline{f\Omega}},\ \nu_{1i} := g_i \rho_{xz_i}\langle f \rangle,\ \nu_0 = g_i \langle \Gamma_i \rangle,\ \forall i = \overline{1,n}$ та нормою

$$\langle \mathcal{X} \rangle_j := \int \mathcal{X}\left(y_1,\ldots y_l\right)\pi_j\left(y_j\right)dy_j, \quad \forall j = \overline{1,l},$$

$$\langle \mathcal{X} \rangle_{1,2} = \int_{R^2} \mathcal{X}\left(y_1,\ldots y_l\right)\pi_1\left(y_1\right)\pi_2\left(y_2\right)dy_1 dy_2,$$

$$\langle \mathcal{X} \rangle_{l-1,l} = \int_{R^l} \mathcal{X}\left(y_1,\ldots y_l\right)\pi_1\left(y_1\right)\ldots\pi_l\left(y_l\right)dy_1\ldots dy_l,$$

$\langle \mathcal{X} \rangle_{l-1,l} = \mathcal{X}$, $f\Omega := \overline{f\Omega}$, $f^2 = \overline{\sigma}^2$.

Знайдемо розв’язки рівнянь (4)-(5) на основі власних функцій, власних значень оператора $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$, кожне з яких задовольняє відповідне рівняння Пуассона [5]:

$$\mathfrak{L}_{01}\varphi_1 = f^2 - \langle f^2 \rangle_1,\ \mathfrak{L}_{02}\varphi_2 = \langle f^2 \rangle_1 - \langle f^2 \rangle_{1,2},\ldots,\mathfrak{L}_{0l}\varphi_l = \langle f^2 \rangle_{l-2,l-1} - \langle f^2 \rangle_{l-1,l}.$$

$$\mathfrak{L}_{01}\eta_1 = f\Omega - \langle f\Omega \rangle_1,\ \ldots,\mathfrak{L}_{0j}\eta_j = \langle f\Omega \rangle_{j-2,j-1} - \langle f\Omega \rangle_{j-1,j},\ldots,\ \mathfrak{L}_{0l}\eta_l$$
$$= \langle f\Omega \rangle_{l-2,l-1} - \langle f\Omega \rangle_{l-1,l}.$$

Теорема 1: припустимо, що ми можемо розв’язати наступне рівняння для знаходження власного значення:

$$-\langle \mathfrak{L}_2 \rangle \psi_n = \lambda_n \psi_n, \qquad \psi_n \in dom\left(\langle \mathfrak{L}_2 \rangle\right), \qquad (6)$$

а також що $H \in \mathcal{H}$. Тоді розв’язок $u_{\overline{0},\overline{0}'}$ має вигляд:

$$u_{\overline{0},\overline{0}'} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n T_n, \qquad c_n = \left(\psi_n, H\right), \qquad T_n = e^{-t\lambda_n}.$$

Теорема 2: нехай c_n, ψ_n, T_n описуються за допомогою Теореми 1. Визначимо:

$$\mathcal{A}_{jk,n} := \left(\psi_k, \mathcal{A}_j \psi_n\right),\ U_{k,n} := \frac{T_k - T_n}{\lambda_k - \lambda_n}.$$

http://dx.doi.org/10.21511/dm.17(4).2019.02

Тоді розв'язок $u_{\overline{1}_j,\overline{0}'}$ рівняння (4) має вигляд:

$$u_{\overline{1}_j,\overline{0}'} = \sum_n \sum_{k\neq n} c_n A_{jk,n} \psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n \mathcal{A}_{jn,n} \psi_n t T_n$$

Зауважимо, що $u_{\overline{1}_j,\overline{0}'}$ є лінійним у групі параметрів $(\vartheta_{3j}, \vartheta_{2j}, u_{2j}, u_{1j})$.

Теорема 3: нехай c_n, ψ_n і T_n визначені з теореми 1, а $U_{k,n}$ з теореми 2 то матимемо:

$$\tilde{\mathcal{B}}_{ik,n} := \left(\psi_k, \mathcal{B}_i \partial_{Z_i} \psi_n\right),\ \mathcal{B}_{ik,n} := \left(\psi_k, \mathcal{B}_i \psi_n\right),\ V_{ik,n} := \frac{T_k - T_n}{\left(\lambda_k - \lambda_n\right)^2} + \frac{tT_n}{\lambda_k - \lambda_n}.$$

Тоді розв'язок $u_{\overline{0},\overline{1}_i'}$ має вигляд:

$$u_{\overline{0},\overline{1}_i'} = \sum_n \sum_{k\neq n} c_n \tilde{\mathcal{B}}_{ik,n} \psi_k U_{ik,n} - \sum_n c_n \tilde{\mathcal{B}}_{in,n} \psi_n t T_n + \sum_n \sum_{k\neq n} (\partial_{Z_i} c_n) \mathcal{B}_{ik,n} \psi_k U_{ik,n} - \sum_n (\partial_{Z_i} c_n) \mathcal{B}_{in,n} \psi_n t T_n$$

$$+ \sum_n \sum_{k\neq n} c_n \mathcal{B}_{ik,n} \psi_k \left(\partial_{Z_i} \lambda_n\right) V_{ik,n} - \sum_n c_n \mathcal{B}_{in,n} \psi_n \left(\partial_{Z_i} \lambda_n\right) \frac{1}{2} t^2 T_n.$$

Звернемо увагу на те, що $u_{\overline{0},\overline{1}_i'}$ є лінійним в $(\nu_{1i}\overline{\sigma}', \nu_{1i}\overline{f\Omega'}, \nu_{0i}\overline{\sigma}', \nu_{0i}\overline{f\Omega'})$.

Отримавши наближений розв'язок

$$u^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}} \approx u_{\overline{0},\overline{0'}} + \sum_{j=1}^{l} \sqrt{\epsilon_j} u_{\overline{1_j},\overline{0'}} + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\delta_i} u_{\overline{0},\overline{1_i'}}$$

для ціни похідного активу. Для більш точного результату припустимо, що функція виплати $H(x)$ та її похідна по часу є гладкими і обмеженими функціями, Таким чином, ми обмежуємо наш аналіз деривативів гладкою і обмеженою виплатою, в цьому випадку точність оцінки ґрунтується на такій теоремі:

Теорема 4: для фіксованих $(t, x, y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_r)$ існує стала С така, що для будь-якого $\varepsilon_j \leq 1$, $\delta_i \leq 1$ маємо:

$$\left| u^{\overline{\epsilon},\overline{\delta'}} - \left(u_{\overline{0},\overline{0'}} + \sum_{j=1}^{l} \sqrt{\epsilon_j} u_{\overline{1_j},\overline{0'}} + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\delta_i} u_{\overline{0},\overline{1_i'}} \right) \right| \leq C\left(\sum_{j=1}^{l} \epsilon_j + \sum_{i=1}^{r} \delta_i\right).$$

Теорема 4 дає нам інформацію про те, як наближена ціна веде себе при $\varepsilon_j \to 0$ і $\delta_i \to 0$.

Нехай *X* являють собою короткі відсоткові ставки. Однією з найбільш широко відомих моделей коротких курсів відсоткових ставок є модель Васічека, в якій *X* моделюється як процес Орнштейна-Уленбека з багатовимірною стохастичною волатильністю. Зокрема, $\tilde{\mathbb{P}}$ динаміки *X* задані

$$dX_t = \left(\kappa\left(\theta - X_t\right) - f\left(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_l, \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_r\right)\Omega\left(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_l, \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_r\right)\right)dt +$$

$$+ f\left(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_l, \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_r\right) + d\tilde{W}_t^x,\ r\left(X_t\right) = X_t,\ h\left(X_t\right) = 0,$$

де $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_l$, та $\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_r$ є швидко і повільно змінними факторами волатильності, як описано. Обчислимо наближену ціну облігації з нульовим купоном.

Запишемо оператор $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ і пов'язані з ним щільності зі швидкістю *m(x)*

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} \overline{\sigma}^2 \partial_{xx}^2 + \kappa\left(\overline{\theta} - x\right)\partial_x - x, \qquad (7)$$

$$m(x) = \frac{2}{\overline{\sigma}^2} exp\left(\frac{-k}{\overline{\sigma}^2}\left(\overline{\theta} - x\right)^2\right),\ \overline{\theta} = \theta - \frac{1}{\kappa}\overline{f\Omega}.$$

Щоб знайти ціну облігації з виплатами $H\left(X_t\right)=\mathbb{I}_{\{\tau>t\}}=1$, потрібно розв'язати рівняння (7) на знаходження власних значень на відрізку $I=\left(-\infty,\ \infty\right)$ з $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$. Оскільки обидва кінці $-\infty$ і ∞ є природними границями, то розв'язок має вигляд [11].

$$\psi_n=\mathcal{N}_n\exp\left(-A\xi-\frac{1}{2}A^2\right)H_n\left(\xi+A\right),\ \mathcal{N}_n=\left(\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}\frac{\bar{\sigma}}{2^{n+1}n!}\right)^{1/2}$$

$$A=\frac{\bar{\sigma}}{\kappa^{3/2}},\ \xi=\frac{\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\left(x-\bar{\theta}\right),\lambda_n=\lambda_n=\bar{\theta}-\frac{\bar{\sigma}^2}{2\kappa^2}+\kappa n,\qquad n=0,1,2...,$$

де H_n - Ермітові поліноми.

Запишемо вирази для операторів $\mathcal{A}_j$ та $\mathcal{B}_j$:

$$\mathcal{A}_j=-\vartheta_{j3}\partial^3_{xxx}-\left(\vartheta_{j2}+\mathfrak{U}_{j2}\right)\partial^2_{xx}-\mathfrak{U}_{j1}\partial_x,\ \mathcal{B}_j=\vartheta_{j1}\partial_x-\vartheta_{j0}.$$

Оператори $\mathcal{A}_{jk,n},\mathcal{B}_{jk,n},{}_i\tilde{\mathcal{B}}_{jk,n}$ записуються на основі рекурентних співвідношень:

$$\partial_x H_n=2nH_{n-1},\qquad 2xH_n=H_{n+1}+\partial_x H_n,\ \mathcal{A}_{jk,n}=-\vartheta j_3$$

$$\left\{\sum_{m=0}^{3\wedge n}\binom{3}{m}\left(\frac{-1}{\kappa}\right)^{3-m}\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)^m\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-m)!\mathcal{N}_{n-m}}\delta_{k,n-m}\right\}-(\vartheta_2+\mathfrak{U}_{j2})$$

$$\left\{\sum_{m=0}^{3\wedge n}\binom{2}{m}\left(\frac{-1}{\kappa}\right)^{2-m}\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)^m\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-m)!\mathcal{N}_{n-m}}\delta_{k,n-m}\right\}$$

$$-\mathfrak{U}_{j1}\left\{\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\delta_{k,n}+\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-1)!\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1}\right\},$$

$$\mathcal{B}_{jk,n}=-\vartheta_1\left\{\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\delta_{k,n}+\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-1)!\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1}\right\}-\vartheta_{j0}\delta_{k,n},$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{jk,n}=-\vartheta_{j1}\bar{\sigma}^{'\left\{\left[\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\left(\frac{1}{2\bar{\sigma}}-\frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3}-\frac{n}{\bar{\sigma}}\right)\right]\delta_{k,n}\right.}\quad+\left[\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}}\right)+\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)\left(\frac{1}{2\bar{\sigma}}-\frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3}-\frac{n}{\bar{\sigma}}\right)\right]$$

$$\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-1)!\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1}+\left[\left(\frac{-1}{\kappa}\right)\left(\frac{-2}{\bar{\sigma}}\right)+\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)\left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}}\right)\right]\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-2)!\mathcal{N}_{n-2}}\delta_{k,n-2}$$

$$+\left[\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{\bar{\sigma}}\right)\left(\frac{-2}{\bar{\sigma}}\right)\right]\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-3)!\mathcal{N}_{n-3}}\delta_{k,n-3}\right\}-\vartheta_{i0}\bar{\sigma}'\left\{\left(\frac{1}{2\bar{\sigma}}-\frac{\bar{\sigma}}{\kappa^3}-\frac{n}{\bar{\sigma}}\right)\delta_{k,n}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{4}{\kappa^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-1)!\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1}+\left(\frac{-2}{\bar{\sigma}}\right)\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-2)!\mathcal{N}_{n-2}}\delta_{k,n-2}\right\}-$$

http://dx.doi.org/10.21511/dm.17(4).2019.02

$$-\vartheta_{i1}\overline{f\Omega}'\left\{\left(\frac{1}{\kappa^3}\right)\delta_{k,n}+\left(\frac{-4}{\bar{\sigma}\kappa^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-1)!\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1}+\left(\frac{4}{\bar{\sigma}^2}\right)\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-2)!\mathcal{N}_{n-2}}\delta_{k,n-2}\right\}-$$

$$-\vartheta_{i0}\overline{f\Omega}'\left\{\left(\frac{-1}{\kappa^2}\right)\delta_{k,n}+\left(\frac{2}{\bar{\sigma}\sqrt{\kappa}}\right)\frac{n!\mathcal{N}_n}{(n-1)!\mathcal{N}_{n-1}}\delta_{k,n-1}\right\}.$$

Розрахунок c_n можна знайти в [8]:

$$c_n=(\psi_n,1)=\frac{2}{\bar{\sigma}}\sqrt{\frac{\pi}{\kappa}}\mathcal{N}_n A^n e^{-A^2/4}.$$

Наближена ціна облігації тепер може бути розрахована з використанням теорем 1–3.

Для облігації з нульовим купоном, часто розглядають криву прибутковості, а не саму ціну облігації. Дохід $R^{\bar{\varepsilon},\bar{\delta}'}$ в облігації з нульовим купоном, за якою виплачується один долар в момент часу визначається через співвідношення:

$$u^{\bar{\varepsilon},\bar{\delta}'}=\exp\left(-R^{\bar{\varepsilon},\bar{\delta}'}t\right).$$

Отримаємо наближення для облігації з нульовим купоном, розвиваючи в ряд, як ціни облігації, $u^{\bar{\varepsilon},\bar{\delta}'}$ таким і дохід $R^{\bar{\varepsilon},\bar{\delta}'}$ за степенями $\sqrt{\varepsilon_j}$ і $\sqrt{\delta_i}$:

$$u_{\bar{o},\bar{o}'}+\sum_{j=1}^{l}\sqrt{\varepsilon_j}u_{\bar{1}j,\bar{o}'}+\sum_{i=1}^{r}\sqrt{\delta_i}u_{\bar{o},\bar{1}_i'}+\ldots=e^{-\left(R_{\bar{0},\bar{0}'}+\sum_{j=1}^{l}\sqrt{\epsilon_j}R_{\bar{1}_j,\bar{0}'}+\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\delta_i}R_{\bar{0},\bar{1}_i'}\right)t}=$$

$$=e^{-R_{\bar{0},\bar{0}'}t}+\sum_{j=1}^{l}\sqrt{\varepsilon_j}R_{\bar{1}_j,\bar{0}'}e^{-R_{\bar{0},\bar{0}'}t}+\sum_{i=1}^{r}\sqrt{\delta_i}R_{\bar{0},\bar{1}_i'}e^{-R_{\bar{0},\bar{0}'}t}+\ldots$$

Згрупувавши по степенях $\sqrt{\varepsilon_j}$ і $\sqrt{\delta_i}$ отримаємо:

$$R^{\bar{\varepsilon},\bar{\delta}'}\approx R_{\bar{0},\bar{0}'}+\sum_{j=1}^{l}\sqrt{\varepsilon_j}R_{\bar{1}_j,\bar{0}'}+\sum_{i=1}^{r}\sqrt{\delta_i}R_{\bar{0},\bar{1}_i'},$$

$$R_{\bar{0},\bar{0}'}=-\frac{1}{t}\ln\left(u_{\bar{0},\bar{0}'}\right),\quad R_{\bar{1}_j,\bar{0}'}=\frac{-u_{\bar{1}_j,\bar{0}'}}{tu_{\bar{0},\bar{0}'}},\quad R_{\bar{0},\bar{1}_i'}=\frac{-u_{\bar{0},\bar{1}_i'}}{tu_{\bar{0},\bar{0}'}}.$$

Зауважимо, що рисунки будуються покомпонентно в кожній відповідній часовій шкалі, аналогічно як для двох компонент як в роботах [6] та [14].

5. ОБГОВОРЕННЯ

В кінці минулого століття увагу вчених фінансистів привернула проблема зв'язку між ціною активу та його волатильністю [10]. Встановлено, що ціна активу веде себе як волатильність. У відомій моделі Блека-Шоулза волатильність є сталою [1]. Це зумовило низку праць для уточнення цієї моделі. Емпіричними дослідженнями встановлено, що волатильність є випадковою величиною залежною від часу [8, 12]. В [5] запропоновано аналітичні моделі, що мають стохастичну волатильність. Порівнюючи з моделями геометричного броунівського руху переваги моделі Васічека полягають у тому, що коефіцієнт нестабільності співвідноситься з ціною ризикованих активів і може пояснити емпіричні упередження, такі як нестабільність посмішки волатильності. Модель Васічека зазвичай застосовується для розрахунку теоретичної ціни, чутливості та передбачуваної волатильності деривативів [16]. Протягом останніх років проблема інвестицій для пенсійного фонду є дуже важливою, виявилося, що розглянута модель може успішно застосовуватися для вивчення оптимальної інвестиційної стратегії.

Розроблено методи обчислення наближеної ціни деривативів за допомогою інструментів спектрального аналізу, сингулярної та регулярної хвильової теорії у випадку впливу швидко та повільно діючих чинників. Комбінуючи методи з спектральної теорії сингулярних і регулярних збурень, можна наближено обчислити ціну похідних фінансових інструментів, як розклад за власними функціями.

Розширено методику знаходження орієнтовної ціни для широкого класу похідних фінансових інструментів. Використовуючи спектральну теорію самоспряжених операторів у гільбертовому просторі та хвильову теорію сингулярних і регулярних збурень встановлено аналітичну формулу наближеної ціни активів, які описуються моделями з стохастичною волатильністю залежною від l-швидко змінних та r-повільно змінних чинників, $l \geq 1, r \geq 1, \quad l \in N, r \in N$ і локальної змінної.

ВИСНОВКИ

Таким чином у роботі застосовано спектральну теорію та теорію сингулярних і регулярних збурень до короткострокових відсоткових ставок, що описуються моделлю Васічека. Обчислено наближену ціну облігацій та їх дохідність. Застосувавши теорію Штурма-Ліувілля, альтернативи Фредгольма, а також аналіз сингулярних і регулярних збурень в різних часових шкалах, ми маємо явні формули для наближень цін облігацій та дохідності. Для отримання явних формул потрібно розв'язати 2l рівнянь Пуассона.

Основною перевагою нашої методології ціноутворення є те, що, комбінуючи методи з спектральної теорії, регулярної теорії збурень і теорії сингулярних збурень зводимо все до розв'язання рівнянь на знаходження власних функцій та власних значень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Black, F., & Scholes M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy, 81*, 637-659.
2. Borodin, A., & Salminen, P. (2002). *Handbook of Brownian motion: facts and formulae*. Birkhauser.
3. Brennan, M., & Schwartz, E. (1979). A continuous time approach to the pricing of bonds. *Journal of banking and finance, 3*, 133-155.
4. Burtnyak, I., & Malytska, A. (2018). Spectral study of options based on CEV model with multidimensional volatility. *Investment Management and Financial Innovations, 15*(1), 18-25. http://dx.doi.org/10.21511/imfi.15(1).2018.03
5. Burtnyak, I., & Malytska, A. (2018). Taylor expansion for derivative securities pricing as a precondition for strategic market decisions. *Problems and Perspectives in Management, 16*(1), 224-231. http://dx.doi.org/10.21511/ppm.16(1).2018.22
6. Burtnyak, I., & Malytska, A. (2018). Application of the spectral theory and perturbation theory to the study of Ornstein-Uhlenbesck processes. *Carpathian Math. Publ, 10*(2), 273–287. http://dx.doi.org/10.15330/cmp.10.2.273-287
7. Cox, J., Ingersoll, J., & Ross, S. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica, 53*(2), 385-408.
8. Gorovoi, V., & Linetsky, V. (2004). Black's model of interest rates as options, eigenfunction expansions and japanese interest rates. *Mathematical finance, 14*(1), 49-78.
9. Hull, J., & White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance, 42*(2), 281-300.
10. Kumar, R. (2015). Effect of volatility clustering on indifference pricing of options by convex risk measures. *Applied Mathematical Finance, 22*(1), 63-82.
11. Lewis, A. (1998). Applications of eigenfunction expansions in continuoustime finance. *Mathematical Finance, 8*, 349-383.
12. Linetsky, V. (2004). The spectral decomposition of the option value. *International Journal of Theoretical and Applied Finance, 7*(3), 337-384.
13. Linetsky, V. (2007). Chapter 6 spectral methods in derivatives pricing. In Birge, J. R., & Linetsky, V. (Eds.). *Financial engineering. Volume 15 of handbooks in operations research and management science* (pp. 223-299).
14. Lorig, M. (2014). Pricing derivatives on multiscale diffusions: an eigenfunction expansion approach. *Mathematical Finance, 24*(2), 331-363.
15. Merton, R. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell journal of economics and management science, 4*, 141-183.
16. Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics, 5*(2), 177-188.

 http://dx.doi.org/10.21511/dm.17(4).2019.02